Camilo Guidi

Cálculo de sistemas hiperestáticos con el teorema de los trabajos virtuales

Traducción de Yago Rovano A.

Nota del traductor

ES muy conocida la clasificación que se hace en el Curso de Resistencia de Materiales de los sistemas elásticos en estáticamente determinados o isostáticos y estáticamente indeterminados o hiperestáticos.

En el cálculo de los sistemas hiperestáticos, que son frecuentísimos en la Ciencia de las Construcciones, hay que considerar las propiedades elásticas de los materiales que forman la estructura resistente para obtener las ecuaciones que no puede dar la estática para el cálculo de las incógnitas hiperestáticas. Las ecuaciones así obtenidas, combinadas con las que proporciona la estática (ecuaciones de proyección y de momentos) permiten resolver el cálculo de un sistema hiperestático.

Las ecuaciones que hacen intervenir las propiedades elásticas de los materiales pueden obtenerse con la aplicación de dos métodos importantísimos, y que, desgraciadamente, no figuran en el programa de estudios de la Escuela de Ingeniería de la U. de Ch., que citamos aquí por haber hecho en ella nuestros estudios.

Uno de estos métodos se basa en el *teorema de los trabajos virtuales* y el otro en la *teoría de la elipse de elasticidad*. Ambos toman en consideración las deformaciones elásticas del sistema en estudio, y se diferencian en la manera de interpretar y de considerar las deformaciones.

En el método de los trabajos virtuales se consideran las deformaciones en su conjunto y acompañadas de un trabajo de deformación. Si se iguala el trabajo virtual de las fuerzas exteriores, se podrán escribir entre las magnitudes hiperestáticas tantas ecuaciones lineales independientes como magnitudes haya, con lo que se habrá resuelto el problema.

El método de los trabajos virtuales, basado exclusivamente en principios de mecánica racional, tiene carácter analítico. Se sirve, además, de numerosos teoremas derivados del de los trabajos virtuales, tales como los de *Clapeyron*, de *Betti*, de *Castigliano* y de *Maxwell*. Este método es el que se explica en los capítulos que siguen, traducidos de la magnífica obra didáctica del Ing. Profesor *Camilo Guidi: Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni*, Torino, 1929.

Esperamos que en un futuro próximo podremos dar a conocer los fundamentos y algunas aplicaciones del segundo método de cálculo de los sistemas hiperestáticos, llamado teoría de la elipse elasticidad. Este método fué tratado primero por *Culmann*, y en seguida *W. Ritter* le dió un desarrollo importantísimo.

Si consideramos un punto de la estructura resistente, podemos establecer que sufre un desplazamiento, por efecto de una fuerza dada, que actúa sobre él a través de una ligazón rígida. Este desplazamiento puede considerarse como una rotación en torno de un punto, que es su centro instántaneo de rotación. Al hacer lo mismo con los diversos puntos de la construcción se obtendrán otros tantos centros instantáneos de rotación, los cuales forman con las fuerzas dadas un sistema polar, cuya cónica fundamental es imaginaria; pero si se toman los puntos simétricos de los centros instantáneos de rotación respecto al punto central, se obtiene otro sistema polar, cuya cónica fundamental es una elipse, determinada por el «peso elástico» de la estructura.

El método de la elipse de elasticidad utiliza esta propiedad para determinar las incógnitas de los sistemas hiperestáticos, apoyándose en consideraciones de geometría superior o proyectiva.

YAGO ROVANO A.
Ingeniero de Puentes. FF. CC. del Estado.

A).—ESTRUCTURAS ENREJADAS

§ 1. ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS. DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS EN LAS BARRAS

1. Toda estructura enrejada (fig. 1 a) cuyos esfuerzos en las barras sean estáticamente indeterminados, sea por la presencia de *barras superabundantes*, sea por las condiciones de apoyo, las que incluyen *ligazones superabundantes*, puede reducirse a una estructura estáticamente determinada que se llama *estructura principal* (fig. 1 c) si se suprimen las barras y las ligazones superabundantes. Las barras y los apoyos de la estructura principal se llaman *elementos esenciales* de la estructura.

Imaginemos que en una estructura estáticamente indeterminada se suprimen las barras superabundantes, y para que no se altere el régimen en los esfuerzos de las barras restantes, imaginemos que se reemplazan los esfuerzos interiores de las barras suprimidas por esfuerzos exteriores *incógnitos* equipolentes con ellos, aplicados en los nudos de la estructura que estaban unidos por estas barras (fig. 1 b); análogamente, consideremos como fuerzas externas incógnitas las reacciones de apoyo superabundantes. Es claro entonces que los esfuerzos en las barras de la estructura considerada y las reacciones de apoyo correspondientes podrán expresarse en función de las cargas dadas y de dichas fuerzas incógnitas, que designaremos con X', X'', X'''... Y estas funciones deben ser lineales, porque en las ecuaciones de equilibrio todas las fuerzas entran exclusivamente en primer grado. En general puede establecerse que:

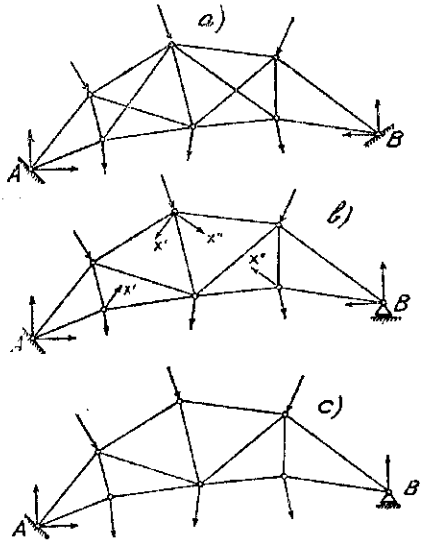

Fig. I.

Los esfuerzos S en las barras y las reacciones C de apoyo de una estructura estáticamente indeterminada pueden expresarse en la forma:

$$(1) \qquad \begin{cases} S = S_0 + S' X' + S'' X'' + S''' X''' + \ldots \\ C = C_0 + C' X' + C'' X'' + C''' X''' + \ldots \end{cases}$$

en la cual X', X'', X'''... representan cantidades estáticamente indeterminadas; S_0 y C_0 representan los esfuerzos y las reacciones de la *estructura principal*, y por lo tanto, son funciones lineales de las cargas P únicamente; S', S''...; C', C''... son independientes de las incógnitas X y de las cargas P, y precisamente, S' y C' son los valores de S y C cuando se supone $X' = 1$ y se hacen cero todas las cargas y las otras cantidades X'', X'''..., hipótesis que designaremos con el nombre de *solicitación $X' = 1$*. Análogamente, S'', C'' son los valores de S y C para la *solicitación $X'' = 1$*, etc. Los esfuerzos S' están en equilibrio con las reacciones C', los S'' con las C'', los S''' con las C''', etc.

Las expresiones (1) valen tanto para las barras y reacciones esenciales como para las superabundantes. Así, p. ej., si X'' representa el esfuerzo de una barra superabundante, a ella le corresponden los valores $S_0 = 0$, $S' = 0$, $S'' = 1$, $S''' = 0$,... y por lo tanto $S = X''$.

2. Ejemplo.—La estructura representada en la fig. 2, unida por rótulas en los puntos B y C de una pared y apoyada en un soporte AD articulado por una rótula en los extremos, se hace estáticamente determinada cuando se suprime el soporte. Designemos con X la reacción del soporte e imaginemos aplicada en A una fuerza exterior equipolente de X; entonces el esfuerzo en una barra cualquiera de la estructura dada, p. ej., en la barra EF queda determinado, según el método de Ritter, por la ecuación

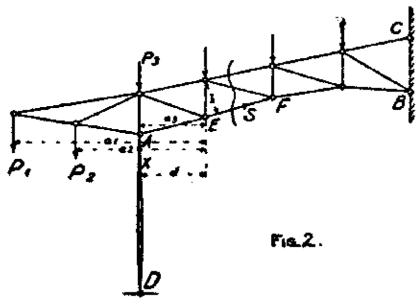

Fig. 2.

$$Xd - P_1 a_1 - P_2 a_2 - P_3 a_3 - Sh = O$$

de donde

$$S = -\frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3}{h} + X\frac{d}{h}$$

en la cual

$$-\frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3}{h} = S_O.$$

representa precisamente el esfuerzo producido en la barra cuando X = 0, o sea cuando faltase el soporte AD y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{h}} = S'$$

es precisamente el esfuerzo producido en la estructura cuando estuviese solicitada exclusivamente por la fuerza X = 1.

3. Cálculo de las cantidades X estáticamente indeterminadas.—Supongamos que la estructura dada sufra una deformación pequeñísima, debido a la cual la longitud s de una barra cualquiera varíe de la cantidad Δs, un punto de apoyo cualquiera sufra un desplazamiento Δc en dirección de la reacción correspondiente C, y el punto de aplicación de una carga cualquiera P se desplace de la cantidad δ en dirección de P. Siempre que las cantidades Δs, Δc y δ sean *geométricamente posibles y pequeñísimas* es válido el *teorema de los trabajos virtuales;* o sea, el trabajo virtual producido por las fuerzas externas a consecuencia de las deformaciones supuestas es igual al producido por las fuerzas interiores, porque las primeras equilibran a las segundas, o sea es válida la ecuación

$$\Sigma P\delta + \Sigma C\Delta c = \Sigma S\Delta s \tag{2}$$

Y en efecto, para el desplazamiento virtual correspondiente a un nudo cualquiera, la suma de los trabajos virtuales producidos por las fuerzas que se cortan en ese nudo (fuerza externa si la hay, y esfuerzos interiores en las diversas barras) debe ser nula, estando en equilibrio el nudo. Análogamente, debe ser nula entonces la suma de todas las sumas análogas, correspondientes a los diversos nudos. El esfuerzo interior en una barra cualquiera figura en dos términos de esa suma que fácilmente se pueden reunir en uno.

Sean AA′, BB′ (fig. 3) los desplazamientos de dos nudos unidos por la barra AB, de manera que A′ B′ represente la nueva posición tomada por la misma barra. Recordando siempre en la aplicación de este principio de mecánica que los desplazamientos son pequeñísimos, es lícito considerar las dos posiciones de la barra como si tuviesen la misma dirección, y entonces, siendo AA″, BB″ las proyecciones de los desplazamientos mencionados en dirección de la barra AB, el trabajo virtual realizado por las dos fuerzas S que ejerce la barra sobre los dos nudos quedará dado por

FIG. 3.

$$-\mathrm{S}\ (\mathrm{AA}'' + \mathrm{BB}'')$$

pero la suma entre paréntesis, por lo que se ha dicho, debe considerarse igual a la variación Δs de longitud experimentada por la barra; por consiguiente, el trabajo resulta igual a $-\mathrm{S}\,\Delta s$ y entonces para toda la estructura se tendrá

$$\Sigma\,\mathrm{P}\,\delta + \Sigma\,\mathrm{C}\,\Delta c - \Sigma\,\mathrm{S}\,\Delta s = 0$$

La (2) en virtud de las (1) puede escribirse también

$$(3)\quad \Sigma\,\mathrm{P}\,\delta + \Sigma\,(\mathrm{C_o} + \mathrm{C}'\mathrm{X}' + \mathrm{C}''\mathrm{X}'' + \ldots)\,\Delta c = \Sigma\,(\mathrm{S_o} + \mathrm{S}'\mathrm{X}' + \mathrm{S}''\mathrm{X}'' + \ldots)\,\Delta s$$

Esta ecuación rige para valores cualesquiera de las cargas P y de las cantidades $X', X''\ldots$, estáticamente indeterminadas; luego, para las *solicitaciones* $\mathrm{X}' = 1, \mathrm{X}'' = 1, \ldots$ nos da respectivamente

$$(4)\quad \begin{cases} \Sigma\,\mathrm{C}'\,\Delta c = \Sigma\,\mathrm{S}'\,\Delta s \\ \Sigma\,\mathrm{C}''\,\Delta c = \Sigma\,\mathrm{S}''\,\Delta s \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Estas ecuaciones, que son tantas como valores de X haya, y los contienen implícitamente, como se verá ahora, sirven para determinar estas incógnitas cuando se le atribuyen a Δc y Δs los valores que efectivamente se producen en la estructura debido a la condición de carga dada.

Obsérvese que las expresiones (1) son válidas para valores cualesquiera de las cargas P y de las incógnitas X, se tiene entonces

$$(5)\qquad \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{X}'} = \mathrm{S}', \quad \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{X}''} = \mathrm{S}'', \ \ldots\ ; \quad \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \mathrm{X}'} = \mathrm{C}', \quad \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \mathrm{X}''} = \mathrm{C}'', \ldots .$$

y entonces las (4) pueden escribirse

$$(6)\qquad \begin{cases} \Sigma \dfrac{\partial C}{\partial X'}\,\Delta c = \Sigma \dfrac{\partial S}{\partial X'}\,\Delta s \\ \Sigma \dfrac{\partial C}{\partial X''}\,\Delta c = \Sigma \dfrac{\partial S}{\partial X''}\,\Delta s \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Estas ecuaciones podrían obtenerse de la (2) tomando las derivadas parciales respecto a las variables independientes X', X'',... observando que δ, Δc, Δs y P, como son arbitrarias, deben considerarse como constantes en esta operación.

4. Desplazamientos Δs y Δc.—Admitido que la estructura no esté sujeta a esfuerzo alguno, para una determinada temperatura, y antes de que actúen las cargas, la variación Δs que sufre la longitud de una barra s cualquiera a consecuencia del esfuerzo S producido en ella por la condición de carga dada, y por un aumento de temperatura de t grados, igual para todos sus puntos, queda dada por:

$$(7)\qquad \Delta s = \frac{S s}{EF} + \alpha t s$$

o también, poniendo para simplificar $\dfrac{s}{EF} = r$

$$(8)\qquad \Delta s = S r + \alpha t s$$

Los desplazamientos Δc de los apoyos pueden clasificarse en *desplazamientos elásticos*, casi siempre expresables exactamente en función de las reacciones correspondientes, y en *sentamientos*, difícilmente avaluables a priori. Si se trata del estudio de una construcción ya ejecutada, los sentamientos, si existen, podrán determinarse; si se trata, en vez, del proyecto de una obra nueva, en general se suponen nulos los sentamientos, salvo que en la ejecución del trabajo se tomen todas las precauciones para que, si no son nulos tales sentamientos, resulten por lo menos pequeñísimos. En los sistemas estáticamente indeterminados aun los pequeños sentamientos de los apoyos pueden producir notables variaciones en el régimen de los esfuerzos internos de la estructura, como p. ej., en la viga continua para pequeñas desnivelaciones de los apoyos. Si tales sentamientos no son exactamente avaluables, o no se pueden hacer tan pequeños para poderlos despreciar, hay que evitar el empleo de estructuras estáticamente indeterminadas. Si los apoyos estuviesen absolutamente fijos, o fuesen móviles sin frotamiento, las ecuaciones de condición que deben satisfacer las incógnitas X serían:

$$(9)\qquad \Sigma S' \Delta s = 0 \qquad\qquad \Sigma S'' \Delta s = 0, \dots\dots$$

5. Ejemplo I.—La fig. 4.ª representa el esquema de un arco enrejado triangular impostado con rótulas en A y B, solicitados por fuerzas P de dirección cualesquiera y sujeto a variaciones de temperatura. El arco sería por sí mismo una estructura estrictamente indeformable y por lo tanto, estáticamente determinado; las condiciones de apoyo incluyen una ligazón superabundante. En efecto, si reemplazamos una rótula, p. ej., la B. por un apoyo móvil, obtenemos la estructura estáticamente determinada, estructura principal, representada en la fig. 4b. Imaginando descompuestas las reacciones de las dos rótulas en componentes verticales A y B y en componentes H_A, H_B que tengan como línea de acción común la cuerda AB, y designando con a y b, respectivamente las distancias de una fuerza cualquiera a las rótulas A y B y con l la proyección horizontal de la cuerda, se tiene evidentemente:

$$A = \frac{\Sigma P b}{l} \quad , \quad B = \frac{\Sigma P a}{l}$$

$$H_A = X \sec \varepsilon - H_0$$

$$H_B = - X \sec \varepsilon$$

si representamos con -X (incógnita hiperestática) la componente horizontal de H y con H_0 (considerado positivo en el sentido de A a B) una fuerza igual y opuesta a la suma algebraica de las proyecciones, hechas en dirección vertical, de las fuerzas P sobre la cuerda AB.

Si el arco está solicitado por cargas verticales, desaparece H_0 y por consiguiente, H_A y H_B resultan dos fuerzas iguales y opuestas, de valor absoluto $X \sec \varepsilon$

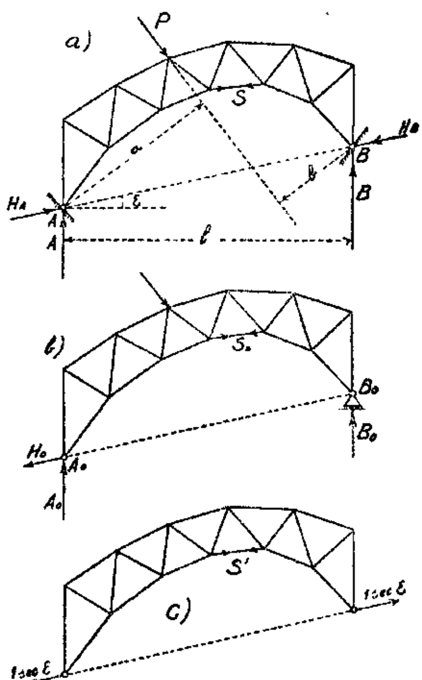

FIG. 4.

Habiendo determinado los esfuerzos S_0 en la estructura principal con un diagrama cremoniano, supongamos en seguida la estructura completamente descargada y sin peso y apliquemos a las rótulas de imposta (fig. 4 c) dos fuerzas de intensidad 1 sec ε actuando según la cuerda, y dirigidas hacia afuera (solicitación X = -1) y determinemos con otro diagrama recíproco los esfuezosr correspondientes S' en las barras. Los esfuerzos efectivos S quedarán dados entonces por la relación:

$$S = S_0 - S' X \tag{10}$$

Para determinar X basta escribir la ecuación de los trabajos virtuales para la solicitación X = -1 y para los desplazamientos efectivos. Si a consecuencia de la carga y de la variación de temperatura ceden las impostas de manera que la luz horizontal l del arco sufra un aumento $\Delta\, l$, aquella ecuación es:

$$1 \cdot \Delta\, l = \Sigma\, S' \Delta\, s \tag{11}$$

o sea, en virtud de (8)

$$\Delta\, l = \Sigma\, S\, S'\, r + \Sigma\, \alpha\, t\, S'\, s$$

y por la (10)

$$\Delta l = \Sigma S_0 S' r - X \Sigma S'^2 r + \Sigma \alpha t S' s$$

de donde

$$(12) \qquad X = \frac{\Sigma S_0 S' r + \Sigma \alpha t S' s - \Delta l}{\Sigma S'^2 r}.$$

6. Observemos de una vez por todas que el cálculo de las estructuras estáticamente indeterminadas supone el conocimiento de las secciones de las barras, las cuales se conocen solamente cuando se trata de un cálculo de verificación. Si se tratara de un cálculo directo, cuyo objeto es precisamente, determinar dichas secciones, convendrá proceder por tanteos, ajustándose a los datos de construcciones ya ejecutadas en condiciones semejantes. Si la temperatura queda constante y los desplazamientos de los apoyos son nulos, es suficiente, como resulta de la (12), conocer la razón entre la magnitud de las secciones de las diversas barras, y esto en un primer cálculo puede preverse con una cierta aproximación, y en algunos casos puede suponerse también igual a la unidad.

En una estructura estáticamente determinada un *defecto de montaje* o una variación de temperatura uniforme para todas las barras, o también distinta para las diversas barras, o limitada a una o algunas barras, no produce esfuerzos interiores independientes de las cargas. En efecto, siendo el sistema estrictamente indeformable, o sea tal que suprimida una barra se convierte en deformable, no encuentra obstáculos para tomar la nueva forma correspondiente a las longitudes variadas de las barras. Tratándose de sistemas estáticamente indeterminados, una variación de temperatura puede producir esfuerzos interiores, como resulta del ejemplo tratado ahora (no los produce en todos; p. ej., en las vigas continuas ordinarias de apoyos móviles, una variación uniforme de temperatura no genera esfuerzos).

Si la variación de temperatura y el coeficiente α de dilatación tienen el mismo valor para todas las barras, se puede sacar estas dos cantidades fuera de la sumatoria $\Sigma \alpha t S' s$ y la $\Sigma S' s$ tiene en general un valor muy sencillo; así en el ejemplo desarrollado, si en la ecuación (11), que subsiste para valores cualesquiera de Δl y Δs, siempre que sean geométricamente posibles y pequeñísimos, hacemos $\Delta s = \omega s$, $\Delta = \omega l$, siendo ω una fracción propia pequeñísima, o sea, suponemos que la estructura se modifique muy poco, de manera que tome una forma semejante a la primitiva, la ecuación se transforma en

$$\omega l = \omega \Sigma S' s$$

de donde

$$(13) \qquad \Sigma S' s = l$$

Si la variación de temperatura se limita solamente a algunas barras, la sumatoria $\Sigma \alpha t S' s$ del numerador de la (12) se limita a éstas naturalmente. Los efectos producidos por un defecto de montaje o una variación de longitud de barras, producida mecánicamente se avalúan como los generados por una variación de temperatura; en efecto, si p. ej., una barra tiene un acortamiento Δs respecto a la longitud que debiera tener, y por lo tanto hay que forzarla en el montaje, se producen los mismos efectos como si en la barra se produjese un acortamiento térmico

$$\alpha t s = \Delta s$$

7. EJEMPLO II.—La figura 5 a representa una viga enrejada atiesada por una cadena de suspensión (una de las estructuras de un puente suspendido rígido). La viga está unida a la cadena por medio de tirantes verticales, fija en un extremo y anclada y móvil horizontalmente en el otro; de manera que siendo verticales las cargas, son verticales también las reacciones A y B. La cadena está suspendida sobre los soportes AA', BB' y en seguida anclada contra los macizos de retención.

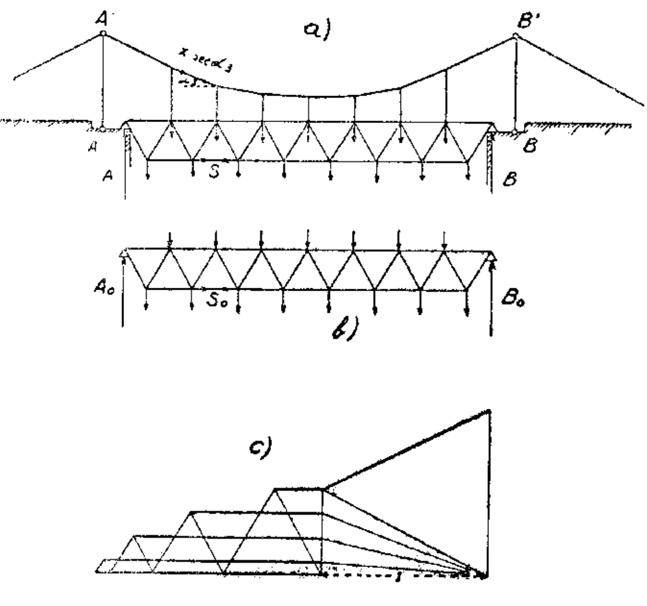

FIG. 5.

Designemos con X la tensión horizontal, constante en la cadena de suspensión; si es nula es cero también el esfuerzo en todos los trozos de la cadena y por lo tanto es cero también el esfuerzo en los tirantes de suspensión; se obtiene así como estructura principal la viga enrejada simple de la fig. 5b. Sentado esto los esfuerzos en las diversas barras pueden escribirse bajo la forma.

$$S = S_0 - S' X \tag{14}$$

siendo S' los esfuerzos producidos por la solicitación X = -1, la que se verifica cuando se supone generada en cada trozo de la cadena una presión, cuya componente horizontal sea = 1. La ecuación para el cálculo de X, cuando se suponen las fundaciones de albañilería absolutamente rígidas, es la siguiente.:

$$O = \Sigma S' \Delta s$$

ó sea

$$O = \Sigma S' (S r + \alpha t s)$$

y por la (14)

$$O = \Sigma S_0 S' r - X \Sigma S'^2 r + \Sigma \alpha t S' s$$

la que da

$$X = \frac{\Sigma S_0 S' r + \Sigma \alpha t S' s}{\Sigma S'^2 r}$$

Los esfuerzos S_0 y S' se obtienen rápidamente construyendo dos diagramas recíprocos (la fig. 5 c representa la mitad del diagrama de los S'). Los soportes y las cadenas de retención se consideran naturalmente como parte integrante de la estructura.

8. EJEMPLO III.—La gran cimbra representada en la fig. 6a está fija en A por una rótula y móvil en B, está sujeta en D y en E por columnas articuladas en sus extremos con rótulas sin rozamiento. Supongamos que las cargas tienen una dirección cualquiera, sean A y B las reacciones verticales de los apoyos extremos, sea H_0 la reacción horizontal del apoyo A, y sean X' y X'' las reacciones dadas por las columnas.

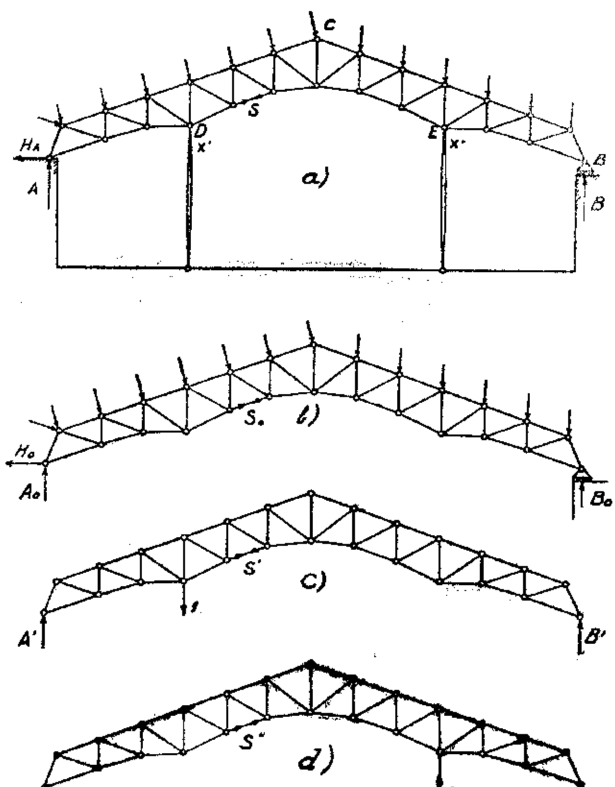

FIG 6

Suprimiendo los dos sostenes intermedios se obtiene la estructura principal estáticamente determinada, representada en la fig. 115 b, para la cual se saben determinar las reacciones A_o, B^o, H_o y los esfuerzos S^o de las barras, construyendo un diagrama recíproco.

Anulemos ahora todas las cargas P y la reacción X'', y hagamos $X' = -1$; resulta la condición de carga representada en la fig. 6 c. Los esfuerzos correspondientes S' en las barras se determinan con otro diagrama recíproco.

Anulemos ahora todas las cargas P y la reacción X' y hagamos $X'' = -1$, se obtiene entonces la condición de carga representada en la fig.6 d y los esfuerzos S'' se determinan construyendo un tercer diagrama recíproco. Si la estructura es simétrica, éste diagrama es simétrico del precedente.

Ahora, para determinar X' y X'' basta escribir las ecuaciones de los trabajos correspondientes a las solicitaciones $X' = -1$, $X'' = -1$ para los desplazamientos efectivos. Ahora, suponiendo que a consecuencia de la deformación de los soportes intermedios, los puntos de apoyo D y E bajen δ_1 y δ_2 respectivamente, despreciando los sentamientos de la construcción de albañilería, se tiene para la solicitación $X' = -1$ la ecuación de los trabajos virtuales:

$$1 \cdot \delta_1 = \Sigma\, S' \Delta\, s$$

Análogamente, se obtiene para la solicitación $X'' = -1$:

$$1 \cdot \delta_2 = \Sigma\, S'' \Delta\, s$$

o sea, en virtud de (8)

$$\delta_1 = \Sigma\, S' \;\; (S\, r + \alpha\, t\, s)$$
$$\delta_2 = \Sigma\, S'' \;\; (S\, r + \alpha\, t\, s)$$

y siendo

$$S = S_o - S' X - S'' X''$$

se tiene también

$$(15) \qquad \begin{cases} \delta_1 = \Sigma\, S_o S'\, r - X' \Sigma\, S'^2 r \;\; - X'' \Sigma\, S' S'' r + \Sigma\, \alpha\, t\, S'\, s \\ \delta_2 = \Sigma\, S_o S''\, r - X' \Sigma\, S' S''\, r - X'' \Sigma\, S''^2 r \;\; + \Sigma\, \alpha\, t\, S''\, s \end{cases}$$

Ahora, indicando con E_c, α_c t_c s_c, F_c, s_c el módulo de elasticidad, la dilatación térmica, el área de la sección transversal y la longitud de las columnas respectivamente, y poniendo $r_c = \dfrac{s_c}{E_c\, F_c}$ se tendrá:

$$\delta_1 = X'\; r_c - \alpha_c\, t_c\, s_c$$
$$\delta_2 = X''\; r_c - \alpha_c\, t_c\, s_c$$

y entonces las (15) se convierten en

$$X' (r_c + \Sigma\, S'^2 r) + X'' \Sigma\, S' S'' r \; = \Sigma\, S_o\, S' r + \alpha_c\, t_c\, s_c + \Sigma\, \alpha\, t\, S'\, s$$
$$X' \Sigma\, S' S'' r + X'' \; (r_c + \Sigma\, S''^2 r) = \Sigma\, S_o\, S'' + \alpha_c\, t_c\, s_c + \Sigma\, \alpha\, t\, S''\, s$$

que sirven para determinar X' y X''.

(Continuará).